

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (2 điểm)

Gọi a là số thực sao cho 3 số $a + \log_2 2018$; $a + \log_4 2018$ và $a + \log_8 2018$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính công bội của cấp số nhân này.

Bài 2. (4 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + mx$ với tham số thực m . Biết rằng hàm số có một giá trị cực trị là $y = 1$. Tìm giá trị cực trị còn lại của hàm số.

Bài 3. (4 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 8$; $AD = BC = 5$ và $AC = BD = 7$.

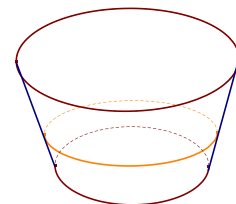
- Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.
- Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (CMD) .

Bài 4. (3 điểm)

Trong một phòng học, có 36 cái bàn rời nhau được đánh số từ 1 đến 36, mỗi bàn dành cho 1 học sinh. Các bàn được xếp thành một hình vuông có kích thước 6×6 . Cô giáo xếp tùy ý 36 học sinh của lớp, trong đó có hai em tên là Hạnh và Phúc, vào các bàn. Tính xác suất để Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau (theo chiều ngang hoặc chiều dọc).

Bài 5. (3 điểm)

Một chậu nước hình nón cụt đều (hình vẽ) có chiều cao 3 dm, bán kính đáy lớn là 2 dm và bán kính đáy nhỏ là 1 dm. Cho biết thể tích nước bằng $\frac{37}{189}$ thể tích của chậu, hãy tính chiều cao của mực nước.



Bài 6. (4 điểm)

Cho hàm số f xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f^2(-x) = (x^2 + 2x + 4)f(x + 2) \text{ và } f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 0$.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2 điểm)

Gọi a là số thực sao cho 3 số $a + \log_2 2018$; $a + \log_4 2018$ và $a + \log_8 2018$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính công bội của cấp số nhân này.

Giải.

Gọi q là công bội. Ta có

$$q = \frac{a + \log_4 2018}{a + \log_2 2018} = \frac{a + \log_8 2018}{a + \log_4 2018} = \frac{\log_4 2018 - \log_8 2018}{\log_2 2018 - \log_4 2018} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Bài 2. (4 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + mx$ với tham số thực m . Biết rằng hàm số có một giá trị cực trị là $y = 1$. Tìm giá trị cực trị còn lại của hàm số.

Giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + m$

Để hàm số đã cho có hai cực trị thì $\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$.

Chia đa thức $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được:

$$x^3 + x^2 + mx = \frac{1}{3}(3x^2 + 2x + m) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6m-2}{9}x - \frac{m}{9}\right).$$

Gọi a là điểm cực trị của hàm số tương ứng với giá trị cực trị là 1, thay vào đẳng thức trên, ta

$$\text{có } 1 = \frac{6m-2}{9}a - \frac{m}{9} \Leftrightarrow a = \frac{m+9}{6m-2}.$$

Do a là nghiệm của $f'(x) = 0$ nên

$$3\left(\frac{m+9}{6m-2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m+9}{6m-2} + m = 0 \Leftrightarrow (m+1)(4m^2 - 5m + 23) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

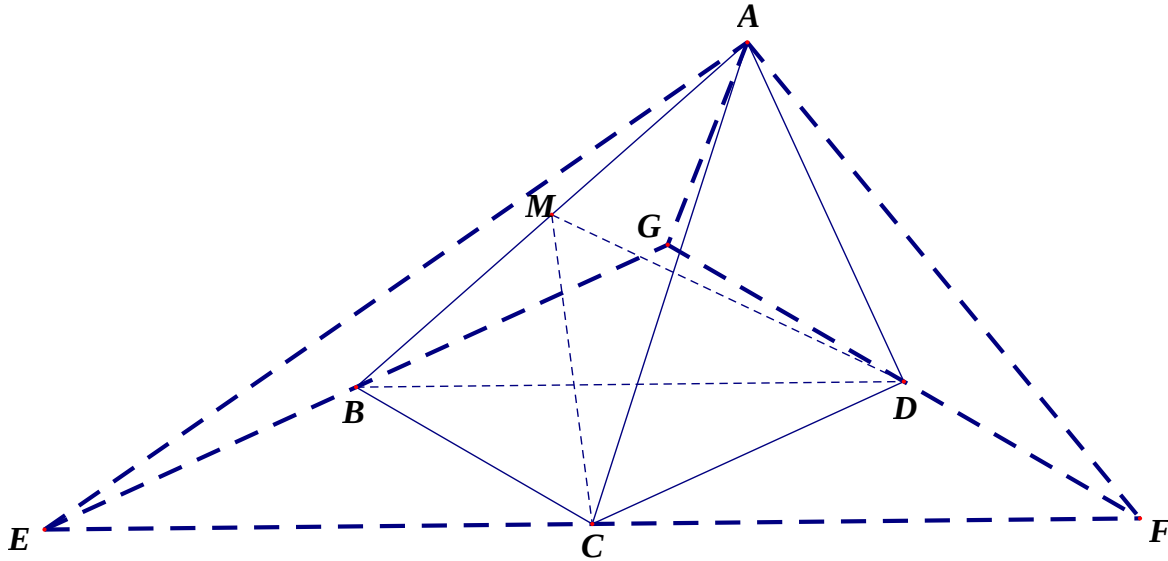
Với $m = -1$ thì $a = -1$

Suy ra điểm cực trị còn lại là $x = \frac{1}{3}$ và giá trị cực trị còn lại cần tìm là $y = -\frac{5}{27}$.

Bài 3. (4 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 8$; $AD = BC = 5$ và $AC = BD = 7$.

- Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.
- Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (CMD) .



- Từ các đỉnh của tam giác BCD ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện chúng tạo thành tam giác EFG có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác BCD .

Các tam giác AEF, AFG, AGE là các tam giác vuông tại A nên ta có:

$$AE^2 + AF^2 = EF^2 = 196$$

$$AF^2 + AG^2 = FG^2 = 100$$

$$AE^2 + AG^2 = EG^2 = 256$$

Giải hệ trên ta được : $AE = 4\sqrt{11}$, $AG = 4\sqrt{5}$, $AF = 2\sqrt{5}$

$$\text{Thể tích khối chóp } A.EFG : \frac{1}{6} \cdot AE \cdot AF \cdot AG = \frac{80\sqrt{11}}{3}$$

$$\text{Thể tích tứ diện } ABCD : \frac{20\sqrt{11}}{3}$$

$$\text{b) Ta có } CM = DM = \sqrt{\frac{BC^2 + CA^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{21}$$

Suy ra diện tích tam giác CMD : $4\sqrt{5}$

$$\text{Suy ra khoảng cách từ } A \text{ đến mp}(BCD) : \frac{10\sqrt{11}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55}}{2} .$$

Bài 4. (3 điểm)

Trong một phòng học, có 36 cái bàn rời nhau được đánh số từ 1 đến 36, mỗi bàn dành cho 1 học sinh. Các bàn được xếp thành một hình vuông có kích thước 6×6 . Cô giáo xếp tùy ý 36 học sinh của lớp, trong đó có hai em tên là Hạnh và Phúc, vào các bàn. Tính xác suất để Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau (theo chiều ngang hoặc chiều dọc).

Giải.

Gọi A là biến cố Hạnh và Phúc ngồi ở hai bàn xếp cạnh nhau.

Số cách sắp xếp 36 học sinh vào 36 cái bàn của lớp cũng chính là số phần tử của không gian mẫu và là $|\Omega| = 36!$

Ta sẽ tính số trường hợp Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau:

- Nếu Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau theo chiều ngang: có 6 cách chọn dãy bàn nằm ngang để 2 bạn ngồi cạnh, có 5 cách chọn cặp vị trí cho Hạnh và Phúc (vị trí 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6) và hoán đổi vị trí cho 2 bạn là $2!$ nên số cách xếp là $6 \times 5 \times 2!$

- Nếu Hạnh và Phúc ngồi cạnh nhau theo chiều dọc: tương tự cũng có $6 \times 5 \times 2!$ cách.

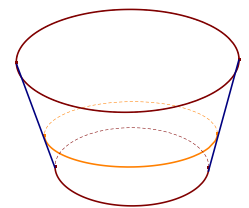
Do đó, tổng số cách xếp chỗ cho 2 bạn Hạnh và Phúc ngồi cạnh (theo chiều ngang hoặc chiều dọc) là: $2 \times 6 \times 5 \times 2!$

Số cách xếp trong trường hợp này là: $|\Omega_A| = 2 \times 6 \times 5 \times 2! \times 34!$

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{2 \times 6 \times 5 \times 2! \times 34!}{36!} = \frac{2}{21}$.

Bài 5. (3 điểm)

Một chậu nước hình nón cụt đều (hình vẽ) có chiều cao 3 dm , bán kính đáy lớn là 2 dm và bán kính đáy nhỏ là 1 dm . Cho biết thể tích nước bằng $\frac{37}{189}$ thể tích của chậu, hãy tính chiều cao của mực nước.



Thể tích của chậu: $V = \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot 1^2 + 4 + 2 = 7\pi$.

Gọi chiều cao mực nước là $3x$ ($x > 0$). Ta có bán kính của mặt nước là: $1 + x$

Ta có phương trình: $\frac{\pi}{3} \cdot 3x \cdot 1^2 + (1+x)^2 + (1+x) = \frac{37}{189} \cdot 7\pi$

$\Leftrightarrow 27x^3 + 81x^2 + 81x - 37 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Vậy chiều cao của mực nước là 1 dm .

Bài 6. (4 điểm)

Cho hàm số f xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^2(-x) = (x^2 + 2x + 4)f(x + 2) \text{ và } f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 0$.

Giải.

Thay $x = 0$ và $x = -2$, ta có $f^2(0) = 4f(2)$ và $f^2(2) = 4f(0)$. Suy ra

$$f^4(0) = 16f^2(2) = 64f(0) \Rightarrow f(0) = 4 \text{ và } f(2) = 4.$$

Đạo hàm hai vế của đẳng thức đã cho, ta có

$$-2f'(-x) \cdot f(-x) = (2x + 2) \cdot f(x + 2) + (x^2 + 2x + 4) \cdot f'(x + 2).$$

Lại thay $x = 0$ và $x = -2$, ta có

$$-2f'(0) \cdot f(0) = 2 \cdot f(2) + 4 \cdot f'(2) \text{ và } -2f'(2) \cdot f(2) = -2 \cdot f(0) + 4 \cdot f'(0) \text{ hay}$$

$$-2f'(0) = 2 + f'(2) \text{ và } -2f'(2) = -2 + f'(0).$$

Giải hệ này, ta được $f'(0) = -2$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $f(x) = -2(x - 0) + 4$ hay $f(x) = -2x + 4$.